大数定律及中心极限定理

一、作业 (提交时间：Nov. 18, 2025)

1.[b203-3] 设 $\{X_k\}$ 为独立随机变量序列, 且 $P(X_1=0)=1$,

$$P(X_k=\pm\sqrt{n})=\frac{1}{n},\quad P(X_k=0)=1-\frac{2}{n},\quad n=2,3,\ldots$$

证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律.

2.[b206-14] 设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，方差存在。又设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为绝对收敛级数。令

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

证明 $\{a_nY_n\}$ 服从大数定律。

3.[157-2] 设我校学生概率统计成绩 (百分制)X 服从正态分布, 且每个学生的概率统计成绩相互独立. 设我校学生概率统计平均成绩 (即参数 μ 之值) 为 72 分, 96 分以上的人占考生总数的 2.28%. 今任取 100 个学生的概率统计成绩, 以 Y 表示成绩在 60 分至 84 分之间的人数. 用中心极限定理求 $P(Y\geq 60)$.

4.[162-5] 对一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，一个学生无家长、1 名家长、2 名家长参加会议的概率分别为 $0.05, 0.8, 0.15$。若学校共有 400 名学生，设各学生参加会议的家长数相互独立，且服从同一分布。试求：

（1） 参加会议的家长数 X 超过 450 的概率；

（2） 有 1 名家长来参加会议的学生数不多于 340 的概率。

5.[158-4] 在一次集体登山活动中, 假设每个人意外受伤的概率是 1%, 每个人是否意外受伤是相互独立的. (1) 为保证没有人意外受伤的概率大于 0.9, 应当控制参加登山活动的人数为多少人? (2) 如果有 100 人参加这次登山活动, 用中心极限定理求意外受伤的人数小于等于 2 人的概率的近似值.

二、补充练习

1.[b203-4] 在伯努利试验中, 事件 A 出现的概率为 p, 令

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{若在第}n\text{次及第}n+1\text{次试验中}A\text{都出现}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

2.[b203-2] 设 $\{X_k\}$ 为独立随机变量序列, 且

$$P(X_k=\pm 2^k)=\frac{1}{2^{2k+1}},\quad P(X_k=0)=1-\frac{1}{2^{2k}},\quad k=1,2,\ldots$$

证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律.

3.[b205-11] 设 S_n 为 n 次独立试验中事件 A 出现的次数，而事件 A 在第 i 次试验时出现的概率为 p_i, $i=1,2,\ldots,n,\ldots$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1.$$

4.[b204-7] 设 $\{X_k\}$ 为独立同分布随机变量序列, 其共同的分布为

$$P\left(X_n=\frac{2^k}{k^2}\right)=\frac{1}{2^k},\quad k=1,2,\ldots$$

试问 $\{X_n\}$ 是否服从大数定律.

5.[b204-9] 设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列, 其中 X_n 服从参数为 $\sqrt{n}$ 的泊松分布, 试问 $\{X_n\}$ 是否服从大数定律.

6.[156-1] 小王自主创业开了一家蛋糕店, 店内有 A, B, C 三种蛋糕出售, 其售价分别为 5 元、10 元、12 元. 顾客购买 A, B, C 三种蛋糕的概率分别是 0.2、0.3、0.5. 假设今天有 700 位顾客, 每位顾客各买一个蛋糕, 且各位顾客的消费是相互独立的. 用中心极限定理求小王今天的营业额在 7000 元至 7140 元之间的概率的近似值.

7.[159-6] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ 相互独立且服从相同的分布, $X_i \sim U(0,1), i = 1, 2, \ldots, 100$. 用中心极限定理计算 $P(e^{-110} \leq X_1 X_2 \ldots X_{100} \leq e^{-90})$.

8.[158-3] 已知某厂生产的晶体管的寿命服从均值为 100 小时的指数分布, 假定这些晶体管的寿命是相互独立的. 现从该厂的产品中随机地抽取 64 只. 试求这 64 只晶体管的寿命之和超过 7000 小时的概率.

9.[159-5] 某供电网上有一万盏电灯, 夜晚每盏电灯开灯的概率均为 0.1, 且彼此开灯与否是相互独立的. 使用切比雪夫不等式和中心极限定理分别估算夜晚同时开灯数在 970 到 1030 之间的概率.

10. 考虑 $X_n = f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, 有如下四种收敛方式

- 一致收敛: $f_n \to f$
- 点态收敛: $f_n \xrightarrow{\cdot} f$
- 依概率收敛: $f_n \xrightarrow{P} f$
- 依分布收敛: $X_n \xrightarrow{d} X$

思考题: 这四者之间的关系是什么? 并试图说明/证明.