统计的基本概念

一、作业 (提交时间：Nov. 25, 2025)

1.[b235-13] 设 $\bar{x}_1$ 与 $\bar{x}_2$ 是从同一正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 独立抽取的容量相同的两个样本均值。试确定样本容量 n，使得两样本均值的差超过 σ 的概率不超过 0.01。
2.[b238-23] 设总体 X 服从几何分布，即 $P(X=k)=pq^{k-1}$，$k=1,2,\ldots$，其中 $0<p<1$，$q=1-p$，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为该总体的样本。分别求 $x_{(n)},x_{(1)}$ 的概率分布。
3.[176-8] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\geq\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$. 求最小次序统计量 $X_{(1)}$ 的均值和方差.
4.[177-3] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_6)$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的一个样本, 求

(1) $k\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{X_5^2+X_6^2}}$ 服从什么分布, 及其自由度和 k 的取值?

(2) $c\frac{X_4^2+X_5^2}{(X_2+X_3)^2}$ 服从什么分布, 及其自由度和 c 的取值?

5.[b251-11] 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是来自 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本，$y_1,y_2,\ldots,y_m$ 是来自 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，c,d 是任意两个不为 0 的常数，证明:

$$t=\frac{c(\bar{x}-\mu_1)+d(\bar{y}-\mu_2)}{s_w\sqrt{\dfrac{c^2}{n}+\dfrac{d^2}{m}}}\sim t(n+m-2),$$

其中

$$s_w^2=\frac{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}{n+m-2},\qquad s_x^2,\ s_y^2\ \text{分别是两个样本方差.}$$

6.[180-5] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_{10})$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的一个样本, 求下列统计量的抽样分布

(1) $Y_1=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}X_i^2$;

(2) $Y_2=\frac{\sqrt{6}\sum_{i=1}^{4}X_i}{2\sqrt{\sum_{i=5}^{10}X_i^2}}$;

(3) $Y_3=\frac{3\sum_{i=1}^{4}X_i^2}{2\sum_{i=5}^{10}X_i^2}$.

7.[178-6] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_5)$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的一个样本, 求 $a\frac{X_1+X_2}{|X_3-X_4-X_5|}$ 服从什么分布, 及其自由度和 a 的取值?

8.[183-5] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_{36})$ 为取自总体 X 的一个样本，总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X}$、S^2 分别为样本均值和样本方差。求常数 k 使得（侧分位数可查课件中表获得）

$$P(\bar{X}>\mu+kS)=0.95.$$

9.[183-6] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_4)$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的一个样本, 确定常数 c, 使得 $P\left(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}>c\right)=0.05$. (提醒: $F_{0.05}(1,1)=161$)
10.[183-5] 设随机变量 $X\sim t(n)$, $Y\sim F(1,n)$, 给定 $a(0<a<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=a$, 求 $P\{Y>c^2\}$ 的值。

二、补充练习

1.[b248-2] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu,16)$ 的一个样本, 问 n 多大时才能使得 $P(|\bar{X}-\mu|<1)\geq 0.95$ 成立?
2.[174-4] 设总体 $X\sim\mathcal{N}(40,5^2)$, (1) 抽取容量为 36 的样本, 求 $P(38\leq\bar{X}\leq 43)$; (2) 样本容量 n 多大时, 才能使得 $P(|\bar{X}-40|<1)=0.95$.
3.[184-9] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求最大次序统计量 $X_{(n)}$ 的均值和方差.
4.[178-4] 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_5)$ 是取自总体 $X\sim\mathcal{N}(0,4)$ 的一个样本,

(1) 给出常数 c, 使得 $c(X_1^2+X_2^2)$ 服从 χ^2 分布, 求其自由度和 c 的取值;

(2) 给出常数 d, 使得 $d\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布, 求其自由度和 d 的取值;

(3) 给出常数 k, 使得 $k\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}$ 服从 F 分布, 求其自由度和 k 的取值.

5.[183-4] 设 X_1, X_2 相互独立且服从相同的分布 $\mathcal{N}(1,\sigma^2)$, 求 $\frac{X_1-1}{|X_2-1|}$ 的分布.

6. 求 Beta (贝塔) 分布方差的计算过程： $\mathbb{VAR}(X)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}$