参数估计 - 点估计

一、作业 (提交时间：Dec.2, 2025)

1.[194-1] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}(a-x), & 0 < x < a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 a 的矩估计量.
2.[b281-8] 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是来自对数级数分布

$$P(X=k) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \cdot \frac{p^k}{k}, \quad 0 < p < 1,\ k = 1, 2, \ldots$$

的一个样本，求参数 p 的矩估计.

3.[194-2] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 其中总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 其中 λ 未知, $\lambda > 0$, （1）求 λ 的点估计值（矩估计量或最大似然估计量）.（2）如得到如下的一组样本观测值:

X	0	1	2	3	4
频数	17	20	10	2	1

根据（1）求 λ 的点估计值.

4.[b283-2] 设总体概率函数如下，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本，试求未知参数的最大似然估计:
(1) $\quad p(x;\theta) = c\,\theta^c\, x^{-(c+1)}, \quad x > \theta,\ \theta > 0,\ c > 0$已知;
(2) $\quad p(x;\theta) = (k\theta)^{-1}, \quad \theta < x < (k+1)\theta,\ \theta > 0,\ k > 0d$已知.

5.[240-1.11] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本，μ 未知，求 $\theta = P\{X > 2\}$ 的最大似然估计值（用 Φ 表示）.

6.[197-7] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的分布列为

X	-1	0	1
概率	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

其中 θ 未知, $0 < \theta < 1$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

7.[201-5] 讨论上题 θ 的矩估计量和最大似然估计量的无偏性.

8.[199-1] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 $X \sim B(1,p)$, 其中 p 未知且 $0 < p < 1$, 证明 (1)X_1 是 p 的无偏估计; (2)X_1^2 不是 p^2 的无偏估计; (3) 当 $n \geq 2$ 时, X_1X_2 是 p^2 的无偏估计.

9.[203-10] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 且总体 X 的期望 $\mathbb{E}[X] = \mu$, 方差 $\sigma(X) = \sigma^2$, 证明:$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n iX_i$ 是未知参数 μ 的无偏估计量, 也是一致性估计量.

10.[202-8] 设 (X_1, X_2, X_3) 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 证明:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3.$$

都是总体均值 μ 的无偏估计, 并进一步判断哪个估计量更有效.

二、补充练习

1.[196-5] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 0$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

2.[195-3] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-\theta}, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 1$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

3.[196-6] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 服从几何分布, 其分布列为 $P(X = x; p) = p(1-p)^{x-1}$, $(x = 1, 2, \ldots)$. 其中 p 未知, $0 < p < 1$, 求 p 的矩估计量.

4.[197-8] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$. 求 θ 及 λ 的最大似然估计量.

5.[199-2] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x > \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty$, μ 未知, 易知 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_1 = X_1$, 问 (1)$\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计吗? 若不是请修正; (2)μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计吗? 是一致性估计量吗?

6.[200-4] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 选适当的值 c, 使得 $\hat{\sigma}^2 = c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

7.[200-3] 设总体 $X \sim U(\theta, \theta+1)$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 证明:$\hat{\theta_1} = \bar{X} - \frac{1}{2}$, $\hat{\theta_2} = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$, $\hat{\theta_3} = X_{(1)} - \frac{1}{n+1}$ 都是 θ 的无偏估计.